TEORIA DEI SEGNALI B

SEGNALE → grandezza fisica variabile nel tempo che supporta un'informazione

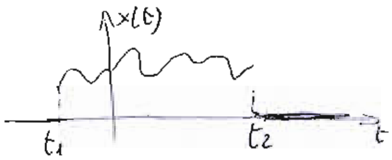
SEGNALE ANALOGICO → può assumere valori qualunque in un insieme continuo; l'informazione sta nella <u>forma</u> del segnale.

SEGNALE NUMERICO (DIGITALE) → può assumere solo un numero finito di valori; l'informazione sta nella <u>sequenza</u> di simboli.

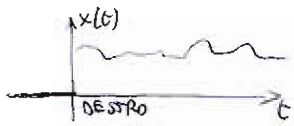
SEGNALE PERIODICO → il grafico del segnale ha un andamento che si ripete uguale a sé stesso per ogni intervallo di ampiezza T_0 (periodo fondamentale)

SEGNALE PARI → segnale simmetrico rispetto all'asse y per cui vale $x(t)=x(-t)\ \forall t$.
SEGNALE DISPARI → segnale simmetrico rispetto all'origine per cui vale $x(t)=-x(-t)\ \forall t$.
Ogni segnale $x(t)$ può essere scritto come la somma della sua parte pari $X_P(t)$ e la sua parte dispari $X_D(t)$ dove $X_P(t)=\frac{1}{2}x(t)+\frac{1}{2}x(-t)$ e $X_D(t)=\frac{1}{2}x(t)-\frac{1}{2}x(t)$

SEGNALE A DURATA FINITA o LIMITATA → segnale per cui esiste un intervallo di tempo $[t_1,t_2]$ all'esterno del quale il segnale è nullo: $x(t)=0$ per $t\notin[t_1,t_2]$; la differenza $D=t_2-t_1$ è detta <u>durata</u> del segnale.



SEGNALE A DURATA INFINITA o ILLIMITATA → segnale non limitato; se $t_2=\infty$ si parla di <u>segnale destro</u>, se $t_1=\infty$ si parla di <u>segnale sinistro</u>.



SEGNALE CAUSALE → segnale destro in cui $t_1=0$.
SEGNALE ANTICAUSALE → segnale sinistro in cui $t_2=0$.

VALOR MEDIO TEMPORALE → $\langle x(t)\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}x(t)\,dt$. Per segnali periodici, l'intervallo viene ristretto ad un periodo:

$$\langle x(t)\rangle_{PER.}=\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}x(t)\,dt$$

POTENZA ISTANTANEA → $P_x(t)=|x(t)|^2$

POTENZA MEDIA → $P_x=\langle P_x(t)\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|^2dt$

I segnali periodici hanno potenza finita pari a $\frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2}|x(t)|^2dt$.

Un segnale a potenza finita ha delle elongazioni più o meno simili e costanti. Tutti i segnali a durata finita hanno potenza infinitesima.

ENERGIA TOTALE → $E_x=\int_{-\infty}^{+\infty}|x(t)|^2dt$

ENERGIA → $E=\lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{T/2}|x(t)|^2dt$

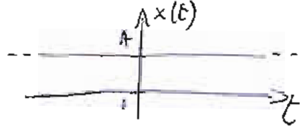
Se l'energia è finita, il segnale si dice SEGNALE DI ENERGIA. Un segnale di energia ha sempre $P_x=0$. Se il segnale è periodico (non nullo), la sua energia vale ∞.

VALORE EFFICACE → valore del segnale costante che ha la stessa potenza di $x(t)$.

$X_{eff}=\sqrt{P_x}$. N.B. è diverso dal valore massimo.

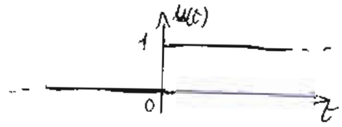
SEGNALI ELEMENTARI

- SEGNALE COSTANTE: $x(t) = A$

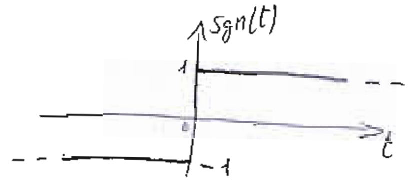


- SEGNALE A GRADINO UNITARIO: $u(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t<0 \\ 1 & \text{per } t \geq 0 \end{cases}$

è un segnale causale;
spesso $u(0) = 1/2$ (dipende dai testi).



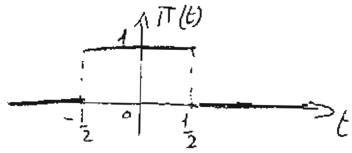
- SEGNALE SEGNO: $sgn(t) = \begin{cases} -1 & \text{per } t<0 \\ 1 & \text{per } t \geq 0 \end{cases} = 2u(t) - 1$



- IMPULSO RETTANGOLARE o PORTA:

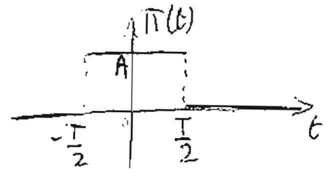
è un segnale pari di durata 1

$$\Pi(t) = rect(t) = \begin{cases} 1 & \text{se } |t| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{se } |t| > \frac{1}{2} \end{cases}$$



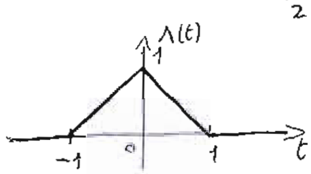
In generale si ha durata $= T$.

$$\Pi(t) = \begin{cases} A & \text{per } |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & \text{per } |t| > \frac{T}{2} \end{cases} = A \cdot \Pi\left(\frac{t}{T}\right)$$



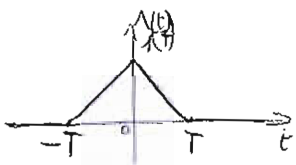
- IMPULSO TRIANGOLARE:

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } |t| > 1 \\ 1-|t| & \text{per } |t| < 1 \end{cases}$$



durata $= 2$
segnale pari

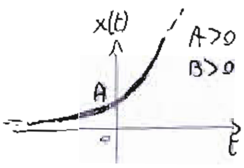
In generale si ha $\Lambda\left(\frac{t}{T}\right)$

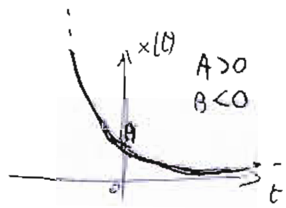


durata $2T$.

- SEGNALE ESPONENZIALE:

$$x(t) = A \cdot e^{Bt} \quad \text{con } A, B \in \mathbb{R}$$

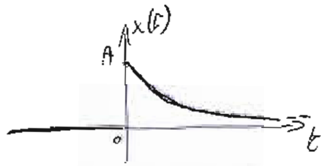




- SEGNALE ESPONENZIALE NEGATIVO:

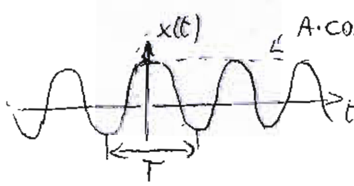
è un segnale causale

$$x(t) = A \cdot e^{-Bt} \cdot u(t) \quad \text{con } A, B \in \mathbb{R}^+$$



- SEGNALE SINUSOIDALE:

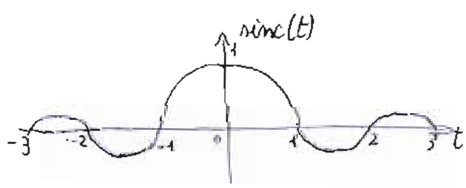
$$x(t) = A \cdot \cos(2\pi f_0 t + \varphi)$$



$A \to$ ampiezza
$f_0 \to$ frequenza
$\varphi \to$ fase iniziale
$\omega_0 = 2\pi f_0 \to$ pulsazione

SEGNALE SINC:

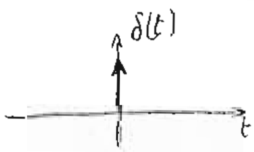
$$sinc(t) = \frac{sen(\pi t)}{\pi t}$$



- Vale 1 nell'origine perché $\lim_{t \to 0} \frac{sen \pi t}{\pi t} = 1$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} sinc(t)\,dt = 1$

DELTA DI DIRAC:

- è pari;
- è la derivata di $u(t)$;



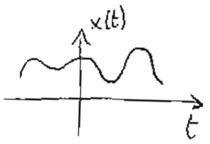
definito dalla PROPRIETÀ CAMPIONATRICE $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \delta(t)\,dt = x(0)$

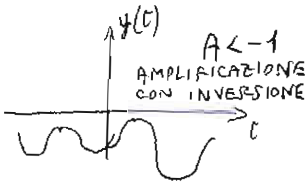
La delta cade dove si annulla l'argomento: $\delta(t - \tau) \to$ cade in $t = \tau$.
traslazione

$\delta(t) = \lim \frac{\alpha}{\pi} sinc\left(\frac{\alpha}{\pi} t\right)$

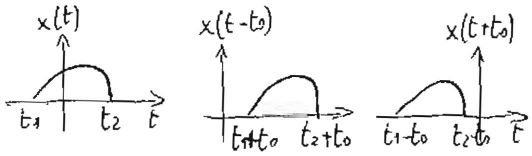
TRASFORMAZIONI ELEMENTARI

• MOLTIPLICAZIONI PER UNA COSTANTE → dato un segnale $x(t)$, $y(t)=A\cdot x(t)$ ha un grafico identi a quello di $x(t)$ salvo il fatto che l'ampiezza del segn è moltiplicata per A. Se $|A|>1$ c'è un'<u>amplificazione</u> per $|A|<1$ c'è una <u>attenuazione</u>. In particolare, se $A<0$ il segnale si inverte.

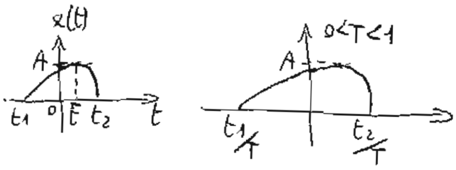




• TRASLAZIONE TEMPORALE → consiste nel ritardare o nell'anticipare il segnale $x(t)$
$y(t)=x(t-t_0)$ produce un RITARDO del segnale, ovvero spos il grafico di $x(t)$ verso <u>destra</u>;
$y(t)=x(t+t_0)$ produce un ANTICIPO del segnale, ovvero sposta il grafico di $x(t)$ verso <u>sinistra</u>.



• CAMBIAMENTO DI SCALA → si ottiene dividendo l'argomento t del segnale per una generica costante T; il risultato è una <u>espansione</u> del grafico di $x(t)$ se $|T|>1$ oppure una <u>compressione</u> se $|T|<$ Per $T<0$ ci sarà anche un'inversione temporale (ribaltamento rispetto all'asse y) del segnale.



SISTEMI

SISTEMA → apparato che trasforma uno [o più] segnali, detti <u>di ingresso</u>, in uno [o più] segnali, detti <u>di uscita</u>. $x(t) \longrightarrow \boxed{T} \longrightarrow y(t)$

I sistemi che consideriamo sono quelli DETERMINISTICI, per i quali l'uscita è univocamen determinata dato il segnale d'ingresso.

SISTEMA CAUSALE → la risposta del sistema ad un dato istante di tempo t non può dipendere da valori futuri del segnale di ingresso:

$y(t_0)$ dipende dagli $x(t)$ $\forall t<t_0$.

$$y(t)=T[x(\tau);-\infty<\tau<t]=T[x(\tau)\cdot u(t-\tau);t]$$

SISTEMA CON MEMORIA → l'uscita dipende dall'ingresso attuale e da quelli precedenti.

SISTEMA SENZA MEMORIA → l'uscita dipende solo dall'ingresso attuale.

SISTEMA STABILE → ad ingressi limitati in ampiezza corrispondono uscite limitate

B.I.B.O. → Bounded Input Bounded Output

$$|x(t)|<M \Longrightarrow |y(t)|<L$$

SISTEMA STAZIONARIO → per un dato segnale di ingresso $x(\cdot)$ produce la stessa uscita $y(\cdot)$
- TEMPO INVARIANTE indipendentemente dall'istante di applicazione dell'ingresso:

$y(t)=T[x(t)] \Longrightarrow T[x(t-t_0)]=y(t-t_0)$ dove t_0 è la generica traslazione temporale applicata al segnale d'ingresso.

SISTEMA LINEARE → gode del principio di sovrapposizione degli effetti. Date quindi $y_1(t)=T[x_1(t)]$ e $y_2(t)=T[x_2(t)]$, vale che $y_3(t)=T[a_1x_1(t)+a_2x_2(t)]\stackrel{?}{=}$
$=a_1y_1(t)+a_2y_2(t)$. $\forall x_1,x_2,a_1,a_2$.

SISTEMA OMOGENEO → moltiplicando un ingresso per una costante, anche l'uscita viene moltiplicata per quella costante

$y(t) = x(6-t) = x(-(t-6))$

- MEMORIA: per trovare $y(\bar{t})$ mi serve conoscere il valore di $x(6-\bar{t})$; $6-\bar{t} \neq \bar{t}$, quindi il sistema è con memoria.
- CAUSALITÀ: mi chiedo se $6-t \leq t \ \forall t$. $6 \leq 2t$, $t \geq 3$ quindi non è causale.
- STABILITÀ: mi chiedo se dato un ingresso limitato ottengo sempre un'uscita limitata. $|y(t)| = |x(6-t)|$, $|x(t)| \leq M \Rightarrow |x(6-t)| \leq M$ $\Rightarrow |y(t)| \leq M$ è limitata $\Rightarrow$ sistema stabile.
- TEMPO INVARIANZA: prima provo a ritardare l'ingresso e a calcolare l'uscita e poi ritardo l'uscita e controllo che sia uguale a quella prima.
- LINEARITÀ: prendo due generici ingressi $x_1(t)$ e $x_2(t)$ a cui corrispondono le uscite $y_1(t)$ e $y_2(t)$; dato l'ingresso $x_3(t) = a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t)$ l'uscita $y_3(t)$ deve essere uguale a $a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$.

$y(t) = A(t) \int_{-\infty}^{t} B \cdot x(\tau) d\tau$

Se L.T.I. guardo se $h(t)$ è causale, cioè se nulla per $t<0$. Se lo è, il sistema è caus

Se L.T.I. guardo se $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < +\infty$. Nel c il sistema è stabile (B.I.B.O.).

Calcolo $y(t-t_0)$ sostituendo a t, $t-t_0$. Mi calcolo $y_R(t)$ ritardando $x(\tau)$ di t_0; applico il cambiamen di variabile $\alpha = \tau - t_0$ e semplifico l'integral Se diventa uguale a $y(t-t_0)$, il sistema è temp invariante.

Si verifica allo stesso modo sfruttando la linearità dell'integrale.

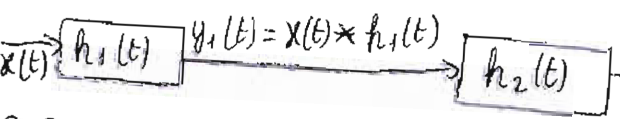
RISPOSTA IMPULSIVA $h(t)$

In sistemi L.T.I. si definisce una funzione $h(t) = T[\delta(t)]$ come risposta impulsiva. Questa funzione permette di ottenere l'uscita del sistema L.T.I. (FILTRO) come convoluzione tra l'ingresso $x(t)$ e la $h(t)$.

PROPRIETÀ DELLA CONVOLUZIONE

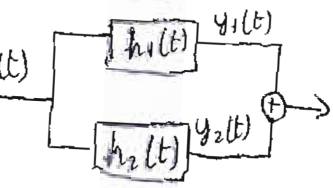
- COMMUTATIVA: $x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$
- ASSOCIATIVA: $(x(t) * g(t)) * h(t) = x(t) * (g(t) * h(t))$
- DISTRIBUTIVA: $x(t) * (g(t) + h(t)) = x(t) * g(t) + x(t) * h(t)$
- ELEMENTO NEUTRO: $x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \cdot \delta(t-\tau) d\tau = x(t)$
- TRASLAZIONE: $x(t) * \delta(t-t_0) = x(t-t_0)$

SISTEMI IN CASCATA



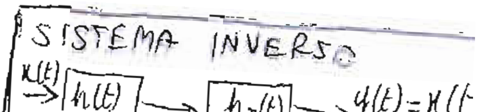
$y_2 = y_1(t) * h_2(t) = x(t) * \underbrace{[h_1(t) * h_2(t)]}_{h_{eq}(t)}$

SISTEMI IN PARALLELO



$y(t) = y_1(t) + y_2(t) = x(t) * [h_1(t) + h_2(t)]$.

SISTEMA INVERSO



$h(t) * h_I(t) = \delta(t)$ elemento neutro della convoluzione

PROCESSI STOCASTICI

PROCESSO STAZIONARIO IN SENSO STRETTO (S.S.S.) $\to$ processo stabile in tutti gli ordini

PROCESSO STAZIONARIO IN SENSO LATO (S.S.L.) $\to$ se S.S.S., anche S.S.L..

VALOR MEDIO

$$\eta_x(t) = E\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_x(x,t)\, dx$$

COSTANTE SE SSL
- nullo se processo armonico con T=2?
- nullo per il rumore termico

$\eta_Y(t) = \eta_x(t) \cdot H(0)$ se $X(t)$ è SSL

VALORE QUADRATICO MEDIO - POTENZA

$$P_x(t) = E\{X^2(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_x(x,t)\, dx = R_x(\underset{\uparrow \tau}{0})$$

VARIANZA

$$\sigma_x^2(t) = E\{(X(t) - \eta_x(t))^2\} = P_x(t) - \eta_x^2(t)$$

FUNZIONE DI AUTOCORRELAZIONE

$$R_x(t_1,t_2) = E\{X(t_1) \cdot X(t_2)\}$$ se dipende da $\tau = t_2 - t_1$, condizione di S.S.L.

AUTOCOVARIANZA

$$C_x(t_1,t_2) = E\left[(X(t_1) - \eta_x(t_1)) \cdot (X(t_2) - \eta_x(t_2))\right] = R_x(t_1,t_2) - \eta_x(t_1) \cdot \eta_x(t_2)$$

se nulla, allora $X(t_1)$ e $X(t_2)$ sono incorrelate

DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA PER PROCESSI SSL (altrimenti non esiste)

$$S_x(f) = P_x(f) = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\} \qquad S_Y(f) = S_x(f) \cdot |H(f)|^2$$

POTENZA MEDIA STATISTICA

$$P_x = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\, df = R_x(0) = E\{X^2(t)\}$$

RIASSUMENDO - PER SISTEMI SSL SI HA:

- η_x COSTANTE ; $\eta_Y = \eta_x \cdot H(0)$ ← Condizioni necessarie e sufficienti affinché si abbia stazionarietà in senso lato (SSL)
- $R_x(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_x(f)\}$ $\quad \tau = t_2 - t_1$ ←
- $S_x(f) = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\}$ $\quad S_Y(f) = S_x(f) \cdot |H(f)|^2$ $\quad R_Y(\tau) = R_x(\tau) * h(\tau) * h(-\tau)$
- $P_x = R_x(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)\, df$

PROCESSI BIANCHI

- $S_X(f) = N_0$ costante
- $P_X = \infty$
- $\eta_X = 0$

PROCESSI GAUSSIANI

- $Y(t)$ Gaussiano
- S.S.L. $\Rightarrow$ S.S.S.

RICORDARE

$$h(t) = \Pi\left(\frac{t-t_0}{T}\right) \overset{\mathcal{F}}{\Longleftrightarrow} H(f) = T\,\mathrm{sinc}(Tf)\cdot e^{-j2\pi f t_0}$$

$$h(t) = \mathrm{sinc}\left(\frac{t-t_0}{T}\right) \overset{\mathcal{F}}{\Longleftrightarrow} H(f) = T\,\Pi(Tf)\cdot e^{-j2\pi f t_0}$$

$$h(t) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right) \overset{\mathcal{F}}{\Longleftrightarrow} H(f) = T\,\mathrm{sinc}^2(Tf)$$

$$h(t) = A e^{-Bt} \overset{\mathcal{F}}{\Longleftrightarrow} H(f) = \frac{A}{B + j2\pi f}$$

$$h(t) = A\cdot\delta(t) \overset{\mathcal{F}}{\Longleftrightarrow} H(f) = A$$

$$h(t) = \delta(t-t_0) \overset{\mathcal{F}}{\Longleftrightarrow} H(f) = e^{-j2\pi f t_0}$$

$$h(t) = e^{j2\pi f_0 t} \overset{\mathcal{F}}{\Longleftrightarrow} H(f) = \delta(f-f_0)$$

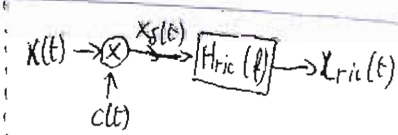
$$h(t) = \mathrm{sgn}(t) \overset{\mathcal{F}}{\Longleftrightarrow} H(f) = \frac{1}{j\pi f}$$

$$h(t) = \cos(2\pi f_0 t) \overset{\mathcal{F}}{\Longleftrightarrow} H(f) = \frac{1}{2}\delta(f-f_0) + \frac{1}{2}\delta(f+f_0)$$

$$h(t) = \mathrm{sen}(2\pi f_0 t) \overset{\mathcal{F}}{\Longleftrightarrow} H(f) = \frac{1}{2}\delta(f-f_0) - \frac{1}{2}\delta(f+f_0)$$

CAMPIONAMENTO

$$c(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_C) \qquad X_C(f) = \frac{1}{T_C}\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - k f_C)}_{\text{repliche}}$$



CAMPIONAMENTO IDEALE

CONDIZIONE DI NYQUIST $\quad f_C \geq B_X$

$f_C \to$ frequenza di campionamento

$B \to$ frequenza (banda) del segnale (se $x(t) = \mathrm{sinc}(3Bt)$, $B_X = 3B$)

$$H_{ric}(f) = T_C \cdot \Pi\left(\frac{f}{f_C}\right) \quad \text{PASSA BASSO}$$

1) da $x(t)$, trasformo in $X(f)$
2) verifico la condizione di Nyquist
3) determino $X_S(f) = \sum_k f_C \cdot X(f - k f_C)$
4) disegno lo spettro di $X_S(f)$
5) applico il filtro di ricostruzione
6) disegno il segnale ricostruito

CAMPIONAMENTO NON IDEALE
SAMPLE & HOLD

- può essere visto come un campionamento ideale seguito da un filtro $S(f)$
- il filtro di ricostruzione sarà composto da un equalizzatore con risposta in frequenza $\frac{1}{S(f)}$ da un ricostruttore (filtro passa basso $T_C\,\Pi\left(\frac{f}{f_C}\right)$) come nel caso ideale.

$$H_{eq\text{-}ric} = \frac{1}{S(f)} \cdot T_C \cdot \Pi\left(\frac{f}{f_C}\right)$$